BÙI THẾ VIỆT

Chuyên Đề CASIO Luyện Thi THPT Quốc Gia

THỦ THUẬT CASIO TÌM HỆ SỐ TRONG KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON

Tác giả : **Bùi Thế Việt** – *Chuyên gia thủ thuật CASIO*

A – GIỚI THIỆU :

Như chúng ta đã biết, kể từ kỳ thi THPT Quốc Gia năm 2017, môn Toán được thi dưới hình thức khác là trắc nghiệm. Với 50 câu hỏi trong 180 phút cùng hàng chục nghìn câu hỏi trắc nghiệm lấy từ ngân hàng đề thi của bộ GD&ĐT, chúng ta khó có thể lường trước được những gì sẽ xảy ra trong kỳ thi sắp tới.

Trong các công cụ được mang vào phòng thi thì CASIO hoặc các máy tính cầm tay khác là thiết bị không thể thiếu trong mỗi kỳ thi. Để đạt hiệu quả cao nhất thì chúng ta cần phải biết cách sử dụng các tính năng của CASIO một cách tối đa.

Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ sử dụng CASIO trong việc giải nhanh các bài toán liên quan tới việc yêu cầu tìm hệ số trong khai triển nhị thức Newton.

Lưu ý : Thủ thuật chỉ phù hợp với hình thức thi trắc nghiệm.

B – Ý TƯỞNG :

Trước hết, chúng ta cần biết về công thức khai triển nhị thức Newton :

$$(a+b)^n = a^n + a^{n-1}b\binom{n}{1} + a^{n-2}b^2\binom{n}{2} + a^{n-3}b^3\binom{n}{3} + \dots + ab^{n-1}\binom{n}{n-1} + b^n$$

Với $\binom{n}{k} = C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Hoặc có thể viết gọn lại : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\binom{n}{k}$

Vậy nếu tìm hệ số của x^t trong khai triển biểu thức $(x+a)^n$, ta chỉ cần xét :

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} x^k a^{n-k}\binom{n}{k}$$

Hệ số của x^t sẽ là $\left[x^t\right] = a^{n-t}\binom{n}{t}$.

Đây là cách làm thường gặp trong khi làm bài thi tự luận. Nhưng đối với trắc nghiệm, chúng ta không quan tâm tới việc mình trình bày thế nào, quan trọng là làm sao để ra

đáp án chính xác và nhanh nhất. Cách làm trên sẽ vô cùng khó khăn khi xét các biểu thức lớn như tìm hệ số x^{10} của $\left(x^3-2x^2+1\right)^8$

Bắt kịp xu thế, tôi (Bùi Thế Việt) mạnh dạn đưa phương pháp mà mình tự nghĩ ra chia sẻ cho bạn đọc để giải quyết bài toán một cách khoa học hơn.

Bài toán : Tìm hệ số x^m của biểu thức :

$$f(x)=\left(a_t x^t+a_{t-1}x^{t-1}+a_{t-2}x^{t-2}+\ldots+a_1 x+a_0\right)^n$$

Hướng dẫn : Hệ số x^m được tính bằng :

$$\left[x^m\right]=\sum \frac{n!}{k_t!k_{t-1}!k_{t-2}!\ldots k_0!}.a_t^{k_t}a_{t-1}^{k_{t-1}}a_{t-2}^{k_{t-2}}\ldots a_1^{k_1}a_0^{k_0}$$

Với $k_1,k_2,k_3,\ldots,k_t\in\mathbb{N}$ thỏa mãn :

$$\begin{cases}k_0+k_1+k_2+\ldots+k_t=n\\ k_1+2k_2+3k_3\ldots+tk_t=m\end{cases}$$

Nhận xét : Công thức trên có vẻ gây khó hiểu cho bạn đọc khi nhìn nó lần đầu tiên. Tuy nhiên, hãy thử xem một vài ví dụ dưới đây để biết những gì nó mang lại như thế nào …

Ví dụ 1 : Tìm hệ số x^7 sau khi khai triển của biểu thức :

$$f(x)=(2x-3)^{10}$$

Hướng dẫn : Với $k_1,k_0\in\mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases}k_0+k_1=10\\ k_1=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_0=3\\ k_1=7\end{cases}$$

Vậy $\left(k_1,k_0\right)=(7,3)$.

Hệ số của x^7 là $\left[x^7\right]=\dfrac{10!}{k_1!k_0!}\cdot 2^{k_1}(-3)^{k_0}=\dfrac{10!}{7!3!}\cdot 2^7(-3)^3=-414720$

Kết luận : Hệ số của x^7 là $\left[x^7\right]=-414720$

Ví dụ 2 : Tìm hệ số x^6 sau khi khai triển của biểu thức :

$$f(x)=\left(3x^2-2x-1\right)^9$$

Hướng dẫn : Với $k_2,k_1,k_0\in\mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases}k_0+k_1+k_2=9\\ k_1+2k_2=6\end{cases}$$

Vậy $\left(k_2,k_1,k_0\right)=(0,6,3);(1,4,4);(2,2,5);(3,0,6)$. Hệ số của x^6 là :

$$\left[x^6\right]=\frac{9!}{0!6!3!}\cdot 3^0(-2)^6(-1)^3+\frac{9!}{1!4!4!}\cdot 3^1(-2)^4(-1)^4+\frac{9!}{2!2!5!}\cdot 3^2(-2)^2(-1)^5+\frac{9!}{3!0!6!}\cdot 3^3(-2)^0(-1)^6$$

$$=-5376+30240-27216+2268=-84$$

Kết luận : Hệ số của x^6 là $\left[x^6\right]=-84$

Nhận xét : Lời giải trên khá là loằng ngoằng phải không ? Nhưng hãy so sánh với cách làm truyền thống, công thức trên của chúng ta dễ làm hơn nhiều …

Lời giải : [truyền thống] Ta có :

$$f(x)=\left(3x^2-2x-1\right)^9=\sum_{k=0}^{9}3^{9-k}x^{18-2k}(-2x-1)^k\binom{9}{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{9}\sum_{i=0}^{k}3^{9-k}x^{18-2k}(-2)^i x^i(-1)^{k-i}\binom{9}{k}\binom{k}{i}$$

$$=\sum_{k=0}^{9}\sum_{i=0}^{k}3^{9-k}(-2)^i(-1)^{k-i}\binom{9}{k}\binom{k}{i}x^{18-2k+i}$$

Vậy $18-2k+i=6\Leftrightarrow(k,i)=(6,0);(7,2);(8,4);(9,6)$. Thế vào ta được :

$$\sum 3^{9-k}(-2)^i(-1)^{k-i}\binom{n}{k}\binom{k}{i}=2268-27216+30240-5376=-84$$

Hệ số của x^6 là $\left[x^6\right]=-84$.

Nhận xét : Thử với những bài toán khó hơn, liệu giải pháp của chúng ta có tối ưu hơn không :

Ví dụ 3 : Tìm hệ số x^9 sau khi khai triển của biểu thức :

$$f(x)=\left(x^4-2x^3+x+2\right)^{12}$$

Hướng dẫn : Với $k_4,k_3,k_1,k_0\in\mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases}k_0+k_1+k_3+k_4=12\\ k_1+3k_3+4k_4=9\end{cases}$$

Khi đó :

k_4	k_3	k_1	k_0		
0	0	9	3	$\to$	1760
0	1	6	5	$\to$	− 354816
0	2	3	7	$\to$	4055040
0	3	0	9	$\to$	− 901120
1	0	5	6	$\to$	354816
1	1	2	8	$\to$	−3041280
2	0	1	9	$\to$	337920

$\Rightarrow\sum=452320$

Kết luận : Hệ số của x^9 là $\left[x^9\right]=452320$.

Nhận xét : Rất nhanh và khoa học ! Chúng ta sẽ chẳng cần phải phá ra thành các tổng nhỏ hơn, cũng chẳng phải tính $\binom{n}{k}$ hay C_n^k. Đơn giản chỉ là công thức :

$$\left[x^m\right]=\sum\frac{n!}{k_t!k_{t-1}!k_{t-2}!...k_0!}.a_t^{k_t}a_{t-1}^{k_{t-1}}a_{t-2}^{k_{t-2}}...a_1^{k_1}a_0^{k_0}$$

Hy vọng bạn đọc hiểu được ý tưởng làm bài mà tôi muốn chia sẻ. Có thể mới đầu nó hơi lạ, nhưng làm nhiều rồi cũng sẽ thành quen …

Tuy nhiên, chúng ta sẽ áp dụng nó vào đề thi trắc nghiệm như thế nào ?

Để giải quyết câu hỏi này, chúng ta cần tới sự trợ giúp của CASIO. Sẽ có hai vấn đề lớn cần giải quyết :

- Làm thế nào để tìm hết giá trị của $k_0,k_1,k_2,...,k_t$ khi giải HPT ?
- Làm thế nào để tính $\sum\frac{n!}{k_t!k_{t-1}!k_{t-2}!...k_0!}.a_t^{k_t}a_{t-1}^{k_{t-1}}a_{t-2}^{k_{t-2}}...a_1^{k_1}a_0^{k_0}$ nhanh chóng ?

Trước tiên, HPT của chúng ta khá đặc biệt :

- Nghiệm là các số tự nhiên
- $PT(1)$ có hệ số đều bằng 1
- $PT(2)$ có hệ số tăng dần khi chỉ số của k tăng

Vậy cách quét hết các nghiệm của HPT rất đơn giản. Chỉ cần đặt bút lên và nháp, giống như bảng giá trị trong Ví dụ 3, chúng ta sẽ lấy được hết nghiệm của HPT nhờ những quy luật tự nhiên của nó. Ví dụ như khi $k_4=0$, k_3 tăng dần từ 0 đến 3 thì k_2 giảm lần lượt $9\to6\to3\to0$ … Khá là thú vị.

Còn việc tính tổng $\sum\frac{n!}{k_t!k_{t-1}!k_{t-2}!...k_0!}.a_t^{k_t}a_{t-1}^{k_{t-1}}a_{t-2}^{k_{t-2}}...a_1^{k_1}a_0^{k_0}$ thì sao ?

Chắc hẳn bạn đọc biết tới các phím chức năng như CALC, STO, M+ để gán giá trị một cách nhanh chóng. Vậy thì :

- Cách 1 : Gõ biểu thức tổng quát (ví dụ như $\frac{12!}{A!B!C!D!}\times(-2)^B\times2^D$ của Ví dụ 3). Sau đó ấn CALC, máy hỏi các giá trị của A, B, C, D cần gán. Nhập lần lượt giá trị của A, B, C, D (ví dụ như ấn 0 = rồi 0 = rồi 9 = rồi 3 =), máy sẽ hiện giá trị của biểu thức ứng với A, B, C, D vừa gán. (máy hiện $\frac{12!}{A!B!C!D!}\times(-2)^B\times2^D=1760$). Lưu kết quả ra nháp rồi sau đó cộng chúng lại, ta được đáp án.
- Cách 2 : Sau mỗi lần CALC xong, chúng ta cộng dồn và lưu giá trị vào một biến nhớ nào đó. Ví dụ như vừa rồi chúng ta tính được $\frac{12!}{A!B!C!D!}\times(-2)^B\times2^D=1760$

Ta lưu nó vào X bằng phím Shift + STO + X, sau đó tính giá trị biểu thức tiếp theo là $\frac{12!}{A!B!C!D!}\times(-2)^{B}\times 2^{D}=-354816$, ta lấy $X+Ans\to X$.

- Cách 3 : Đầu tiên ta gán cho M bằng 0 ($0\to M$). Sau đó mỗi lần tính xong, ấn M+ là máy tự động thêm vào M rồi ($M+Ans\to M$).

Để làm quen với phương pháp mới, chúng ta hãy tập làm những ví dụ dưới đây.

C – THỰC HIỆN :

Ví dụ 4 : Tìm hệ số x^3 sau khi khai triển của biểu thức :

$$f(x)=(2x-3)^{12}$$

(THPT Nam Yên Thành – Nghệ An – Lần 1 – 2015)

Hướng dẫn : Với $k_1,k_0\in\mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases}k_0+k_1=12\\ k_1=3\end{cases}\Rightarrow(k_1,k_0)=(3,9)$$

Vậy : $[x^3]=\frac{12!}{3!9!}\cdot 2^3\cdot(-3)^9=-34642080$

Kết luận : Hệ số của x^3 là $[x^3]=-34642080$.

Ví dụ 5 : Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $2C_n^1-C_n^2+n=0$. Tìm hệ số x^5 sau khi khai triển của biểu thức :

$$f(x)=\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^n$$

(THPT Nguyễn Trung Thiên – Hà Tĩnh – Lần 2 – 2015)

Hướng dẫn : Thử các giá trị của n bằng TABLE, ta thấy $n=7$. Vậy $f(x)=(x^3-2x^{-1})^7$

Với $k_3,k_{-1}\in\mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases}k_{-1}+k_3=7\\ -k_{-1}+3k_3=5\end{cases}\Rightarrow(k_3,k_{-1})=(3,4)$$

Vậy : $[x^5]=\frac{7!}{3!4!}\cdot 1^3\cdot(-2)^4=560$

Kết luận : Hệ số của x^5 là $[x^5]=560$.

Ví dụ 6 : Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $4C_{n+1}^3+2C_n^2=A_n^3$. Tìm hệ số x^7 sau khi khai triển của biểu thức :

$$f(x)=\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^n$$

(THPT Bình Thạnh – Tây Ninh – 2015)

(THPT Chuyên Đại học Vinh – Nghệ An – Khối A,A1 – Lần 1 – 2013)

Hướng dẫn : Không giải trực tiếp phương trình $4C_{n+1}^3 + 2C_n^2 = A_n^3$ mà thử bằng TABLE, ta thấy phương trình có nghiệm $n = 11$. Vậy $f(x) = \left(x^2 - 2x^{-1}\right)^{11}$

Với $k_2, k_{-1} \in \mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} k_{-1} + k_2 = 11 \\ 2k_2 - k_{-1} = 7 \end{cases} \Rightarrow (k_2, k_{-1}) = (6,5)$$

Vậy : $\left[x^7\right] = \dfrac{11!}{6!5!} \cdot 1^6 \cdot (-2)^5 = -14784$

Kết luận : Hệ số của x^7 là $\left[x^7\right] = -14784$.

Ví dụ 7 : Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton của :

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7 \text{ với } x > 0$$

(Đề thi Tuyển Sinh Đại Học, Cao Đẳng – khối D – 2004)

Hướng dẫn : Ta có $f(x) = \left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7 = \left(x^{1/3} + x^{-1/4}\right)^7$

Với $k_{1/3}, k_{-1/4} \in \mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} k_{-1/4} + k_{1/3} = 7 \\ \dfrac{1}{3}k_{1/3} - \dfrac{1}{4}k_{-1/4} = 0 \end{cases} \Rightarrow (k_{1/3}, k_{-1/4}) = (3,4)$$

Vậy : $\left[x^0\right] = \dfrac{7!}{3!4!} \cdot 1^3 \cdot 1^4 = 35$

Kết luận : Hệ số của x^0 là $\left[x^0\right] = 35$.

Ví dụ 8 : Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^n = 255$. Hãy tìm số hạng chứa x^{14} trong khai triển của :

$$f(x) = \left(1 + x + 3x^2\right)^n$$

(THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định – Lần 1 – 2013)

Hướng dẫn : Ta có $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^n = 255 \Leftrightarrow 2^n - 1 = 255 \Leftrightarrow n = 8$

Với $k_2, k_1, k_0 \in \mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} k_0 + k_1 + k_2 = 8 \\ k_1 + 2k_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow (k_2, k_1, k_0) = (6,2,0);(7,0,1)$$

Vậy : $\left[x^{14}\right] = \dfrac{8!}{6!2!0!} \cdot 3^6 + \dfrac{8!}{7!0!1!} \cdot 3^7 = 20412 + 17496 = 37908$

Kết luận : Hệ số của x^{14} là $\left[x^{14}\right] = 37908$.

Ví dụ 9 : Tìm hệ số của x^4 trong khai triển của đa thức:

$$f(x) = (1 + 2x + 3x^2)^{10}$$

(Thử sức trước kỳ thi – Báo TH&TT – Đề số 8 – 2011)

Hướng dẫn : Với $k_2, k_1, k_0 \in \mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} k_0 + k_1 + k_2 = 10 \\ k_1 + 2k_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} k_2 & k_1 & k_0 & \\ 0 & 4 & 6 & \to 3360 \\ 1 & 2 & 7 & \to 4320 \\ 2 & 0 & 8 & \to 405 \end{array} \right| \Rightarrow \Sigma = 8085$$

Kết luận : Hệ số của x^4 là $[x^4] = 8085$.

Ví dụ 10 : Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 4n + 6$. Hãy tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton :

$$f(x) = \left(2x^3 + \frac{1}{x}\right)^n$$

(THPT Ngọc Tảo – Hà Nội – 2016)

Hướng dẫn : Thành thử ta thấy $n = 12$. Khi đó $f(x) = (2x^3 + x^{-1})^{12}$.

Với $k_3, k_{-1} \in \mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} k_{-1} + k_3 = 12 \\ -k_{-1} + 3k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (k_3, k_{-1}) = (3, 9)$$

Vậy : $[x^0] = \dfrac{12!}{3!9!} \cdot 2^3 = 1760$

Kết luận : Hệ số của x^0 là $[x^0] = 1760$.

Ví dụ 11 : Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển nhị thức Newton của biểu thức :

$$f(x) = \left(x - \frac{2}{x^2}\right)^9$$

(THPT Lam Kinh – Thanh Hóa – Lần 1 – 2016)

Hướng dẫn :

Với $k_1, k_{-2} \in \mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} k_{-2} + k_1 = 9 \\ -2k_{-2} + k_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow (k_1, k_{-2}) = (7, 2)$$

Vậy : $[x^3] = \dfrac{9!}{7!2!} \cdot (-2)^2 = 144$

Kết luận : Hệ số của x^3 là $[x^3] = 144$.

Ví dụ 12 : Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}+C_{2n+1}^{5}+...+C_{2n+1}^{2n+1}=1024$.
Hãy tìm số hạng chứa x^7 trong khai triển nhị thức Newton của biểu thức :

$$f(x)=(3-4x)^n$$

(THPT Chuyên Amsterdam – Hà Nội – Khối A – 2013)

Hướng dẫn : Giả thiết cho ta $2^{2n}=1024 \Leftrightarrow n=5$. Khi đó $f(x)=(3-4x)^5$.

Với $k_1,k_0\in\mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases}k_0+k_1=5\\ k_1=7\end{cases} \Rightarrow \text{ không tồn tại } k_1,k_0\in\mathbb{N}.$$

Kết luận : Hệ số của x^7 là $\left[x^7\right]=0$.

Ví dụ 13 : Tìm số hạng có giá trị tuyệt đối lớn nhất trong khai triển của đa thức:

$$(a+b)^{50} \text{ biết } |a|=|b|\sqrt{3}$$

(Thử sức trước kỳ thi – Báo TH&TT – Đề số 7 – 2011)

Hướng dẫn : Chuẩn hóa $b=1$ và $a=x\sqrt{3}$, ta tìm được hệ số $\left[x^k\right]=\dfrac{50!}{k!(50-k)!}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^k$.

Thành thử các giá trị của $\dfrac{50!}{k!(50-k)!}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^k$ bằng TABLE, ta thấy :

$$\left[a^k\right]\max=7.77145\times10^{20}\Leftrightarrow k=32$$

Kết luận : Hệ số có giá trị tuyệt đối lớn nhất là $\left[a^{32}b^{18}\right]$.

Ví dụ 14 : Tìm số hạng chứa x^6 trong khai triển nhị thức Newton của biểu thức :

$$f(x)=(1+2x)^{10}\left(x^2+x+1\right)^2$$

(THPT Trần Quốc Tuấn – Phú Yên – Khối A, B – 2013)

Hướng dẫn : Lưu ý rằng $x^2+x+1=\dfrac{(2x+1)^2+3}{4}$. Do đó :

$$f(x)=(1+2x)^{10}\left(x^2+x+1\right)^2$$
$$=\frac{1}{16}(1+2x)^{14}+\frac{3}{8}(1+2x)^{12}+\frac{9}{16}(1+2x)^{10}$$

Vậy : $\left[x^3\right]=\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{14!}{6!8!}\cdot2^6+\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{12!}{6!6!}\cdot2^6+\dfrac{9}{16}\cdot\dfrac{10!}{6!4!}\cdot2^6=12012+22176+7560=41748$

Kết luận : Hệ số của x^6 là $\left[x^6\right]=41748$.

Ví dụ 15 : Cho n là số nguyên dương thỏa mãn :

$$n^2-5n-15+4^{\log_3(n^2-5n+15)}=(n^2-5n-15)^{\log_3 5}$$

Hãy tìm số hạng chứa x^4 trong khai triển nhị thức Newton của biểu thức :

$$f(x)=(1+x+x^2)^n$$

(THPT Tứ Kỳ – Hải Dương – Khối A, B, D – Lần 2 – 2011)

Hướng dẫn : Thành thử bằng CASIO, ta mò ngay được $n=8$. Vậy $f(x)=(1+x+x^2)^8$.

Với $k_2,k_1,k_0\in\mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases}k_0+k_1+k_2=8\\k_1+2k_2=4\end{cases}\Rightarrow\left|\begin{array}{ccc|c}k_2 & k_1 & k_0 & \\ 0 & 4 & 4 & \to 70\\ 1 & 2 & 5 & \to 168\\ 2 & 0 & 6 & \to 28\end{array}\right|\Rightarrow\sum=266$$

Kết luận : Hệ số của x^4 là $[x^4]=266$.

Ví dụ 16 : Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $n+5^{\log_4 n}=n^{\log_4 9}$.

Hãy tìm số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton của biểu thức :

$$f(x)=\left(1-x^4-\frac{1}{x}\right)^{3n}$$

(THPT Lương Ngọc Quyến – Thái Nguyên – Khối A, B, A1 – 2013)

Hướng dẫn : Thành thử bằng CASIO, ta mò ngay được $n=4$.

Vậy $f(x)=(x^4-1+x^{-1})^{12}$.

Với $k_4,k_0,k_{-1}\in\mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases}k_{-1}+k_0+k_4=12\\-k_{-1}+4k_4=8\end{cases}\Rightarrow\left|\begin{array}{ccc|c}k_4 & k_0 & k_{-1} & \\ 2 & 10 & 0 & \to 66\\ 3 & 5 & 4 & \to -27720\\ 4 & 0 & 8 & \to 495\end{array}\right|\Rightarrow\sum=-27159$$

Kết luận : Hệ số của x^8 là $[x^8]=-27159$.

Ví dụ 17 : Tìm số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton của biểu thức :

$$f(x)=(1+x^2-x^3)^8$$

(THPT Số 1 Tuy Phước – Bình Định – Khối A, A1 – Lần 1 – 2013)

Hướng dẫn : Với $k_3,k_2,k_0\in\mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases}k_0+k_2+k_3=8\\2k_2+3k_3=8\end{cases}\Rightarrow\left|\begin{array}{ccc|c}k_3 & k_2 & k_0 & \\ 0 & 4 & 4 & 70\\ 2 & 1 & 5 & 168\end{array}\right|\Rightarrow\sum=238$$

Kết luận : Hệ số của x^8 là $\left[x^8\right]=238$.

Ví dụ 18 : Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=36$.

Hãy tìm số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton của biểu thức :

$$f(x)=\left(1+2x^2-x^3\right)^n$$

(THPT Lương Ngọc Quyến – Thái Nguyên – Khối A, B, A1 – 2013)

Hướng dẫn : Thành thử bằng CASIO, ta mò ngay được $n=8$.

Vậy $f(x)=\left(1+2x^2-x^3\right)^8$. Với $k_3,k_2,k_0\in\mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases}k_0+k_2+k_3=8\\2k_2+3k_3=8\end{cases}\Rightarrow\left|\begin{array}{ccc|c}k_3 & k_2 & k_0 & \\ 0 & 4 & 4 & 1120\\ 2 & 1 & 5 & 336\end{array}\right|\Rightarrow\sum=1456$$

Kết luận : Hệ số của x^8 là $\left[x^8\right]=1456$.

Ví dụ 19 : Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2048$.

Hãy tìm số hạng chứa x^{19} trong khai triển nhị thức Newton của biểu thức :

$$f(x)=(2x-1)^9(x+2)^n$$

(THPT Đức Thọ – Hà Tĩnh – Khối A – Lần 1 – 2013)

Hướng dẫn : Ta có $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n\Rightarrow n=11$. Vậy $f(x)=(2x-1)^9(x+2)^{11}$.

Giả sử $(2x-1)^9$ có số hạng ax^u và $(x+2)^{11}$ có số hạng bx^v thì $u+v=19$

Từ đó ta tìm được $(u,v)=(9,10);(8,11)$.

Vậy $\left[x^{19}\right]=2^9\cdot\dfrac{11!}{10!}\cdot2^1+1^{11}\cdot\dfrac{9!}{8!}\cdot2^8\cdot(-1)^1=8960$

Kết luận : Hệ số của x^{19} là $\left[x^{19}\right]=8960$.

Ví dụ 19 : Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$.

Hãy tìm số hạng chứa x^4 trong khai triển nhị thức Newton của biểu thức :

$$f(x)=\left(1+\frac{n}{2}x+3x^2\right)^{n-2}$$

(THPT Cù Huy Cận – Hà Tĩnh – Khối A, A1, B, D – Lần 1 – 2013)

Hướng dẫn : Thành thử bằng CASIO, ta mò ngay được $n=12$.

Vậy $f(x)=\left(1+2x+3x^2\right)^{10}$. Với $k_2,k_1,k_0\in\mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} k_0+k_1+k_2=10 \\ k_1+2k_2=4 \end{cases} \Rightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} k_2 & k_1 & k_0 & \\ 0 & 4 & 6 & \to 3360 \\ 1 & 2 & 7 & \to 4320 \\ 2 & 0 & 8 & \to 405 \end{array}\right| \Rightarrow \sum = 8085$$

Kết luận : Hệ số của x^4 là $\left[x^4\right]=8085$.

Ví dụ 20 : Tìm số hạng chứa x^{2010} trong khai triển nhị thức Newton của biểu thức :

$$f(x)=\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^{2016}$$

(THPT Lý Thái Tổ – Bắc Ninh – 2016)

Hướng dẫn : Với $k_1,k_{-2}\in\mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} k_{-2}+k_1=2016 \\ -2k_{-2}+k_1=2010 \end{cases} \Rightarrow (k_1,k_{-2})=(2014,2)$$

Vậy $\left[x^{2010}\right]=\dfrac{2016!}{2014!2!}\cdot 2^2=8124480$

Kết luận : Hệ số của x^{2010} là $\left[x^{2010}\right]=8124480$.

Nhận xét : Bạn đọc có thể thấy, hầu như các đề thi thử chỉ yêu cầu khai triển ở mức cơ bản $(a+b)^n$ hoặc $(a+b+c)^n$. Vậy với những bài khó hơn như $(a+b+c+d)^n$ thì sao ?

D – MỞ RỘNG :

Ví dụ 21 : Tìm hệ số x^7 sau khi khai triển của biểu thức :

$$f(x)=\left(2x^3-x^2-x+3\right)^8$$

Hướng dẫn : Với $k_3,k_2,k_1,k_0\in\mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} k_0+k_1+k_2+k_3=8 \\ k_1+2k_2+3k_3=7 \end{cases} \Rightarrow \left|\begin{array}{cccc} k_3 & k_2 & k_1 & k_0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \\ -24 \\ 1512 \\ -15120 \\ 22680 \\ 15120 \\ -136080 \\ 81648 \\ -163296 \end{array}\right| \Rightarrow \sum=-193560$$

Kết luận : Hệ số của x^7 là $\left[x^7\right]=-193560$.

Ví dụ 22 : Tìm hệ số x^9 sau khi khai triển của biểu thức :

$$f(x)=\left(5x^4-x^3+2x^2-1\right)^{200}$$

Hướng dẫn : Với $k_4, k_3, k_2, k_0 \in \mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} k_0 + k_2 + k_3 + k_4 = 200 \\ 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} k_4 & k_3 & k_2 & k_0 \\ 0 & 1 & 3 & 196 \\ 0 & 3 & 0 & 197 \\ 1 & 1 & 1 & 197 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \\ -2069918400 \\ 1313400 \\ 78804000 \end{vmatrix} \Rightarrow \Sigma = -1989801000$$

Kết luận : Hệ số của x^9 là $\left[x^9\right] = -1989801000$.

Ví dụ 23 : Tìm hệ số $\frac{1}{x^{188}}$ sau khi khai triển của biểu thức :

$$f(x) = \left(2x^7 + 4x^5 - 3x - \frac{1}{x^2}\right)^{100}$$

Hướng dẫn : Với $k_7, k_5, k_1, k_{-2} \in \mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} k_{-2} + k_1 + k_5 + k_7 = 100 \\ -2k_{-2} + k_1 + 5k_5 + 7k_7 = -188 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} k_7 & k_5 & k_1 & k_{-2} \\ 0 & 0 & 4 & 96 \\ 1 & 0 & 1 & 98 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \\ 317619225 \\ -59400 \end{vmatrix} \Rightarrow \Sigma = 317559825$$

Kết luận : Hệ số của $\frac{1}{x^{188}}$ là $\left[x^{-188}\right] = 317559825$.

Ví dụ 24 : Tìm hệ số x^{58} sau khi khai triển của biểu thức :

$$f(x) = \left(x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x - 1\right)^{13}$$

Hướng dẫn : Với $k_5, k_4, k_3, k_2, k_1, k_0 \in \mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} k_0 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 13 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 + 5k_5 = 58 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} k_5 & k_4 & k_3 & k_2 & k_1 & k_0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 11 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 11 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \\ -1716 \\ 20592 \\ -51480 \\ 6435 \\ 22880 \\ -17160 \\ 5720 \\ 3432 \\ -858 \\ -6864 \\ -858 \\ 312 \\ -312 \end{vmatrix} \Rightarrow \Sigma = -19877$$

Kết luận : Hệ số của x^{58} là $\left[x^{58}\right]=-19877$.

D – BÀI TẬP TỰ LUYỆN :

Bài 1 : Tìm hệ số x^5 sau khi khai triển: $\left(4x-7\right)^{12}$
Bài 2 : Tìm hệ số x^{10} sau khi khai triển: $\left(2x^2-\frac{1}{x^3}\right)^{10}$
Bài 3 : Tìm hệ số không chứa x sau khi khai triển: $\left(4x^7-\frac{1}{x^2}\right)^{18}$
Bài 4 : Tìm hệ số x^6 sau khi khai triển: $\left(3x^2-2x-2\right)^{10}$
Bài 5 : Tìm hệ số x^{10} sau khi khai triển: $\left(x^5-4x^3-2\right)^{20}$
Bài 6 : Tìm hệ số x^{193} sau khi khai triển: $\left(x^2-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)^{100}$
Bài 7 : Tìm hệ số x^{10} sau khi khai triển: $\left(x^3-2x^2-x-1\right)^8$
Bài 8 : Tìm hệ số x^{2017} sau khi khai triển: $\left(x^{10}+2x^5+x-1\right)^{204}$
Bài 9 : Tìm hệ số không chứa x sau khi khai triển: $\left(x^2-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^5}\right)^6$
Bài 10 : Tìm hệ số x^{13} sau khi khai triển: $\left(1+x+x^2+x^3+...+x^{13}\right)^{13}$

E – ĐÁP ÁN :

Bài 1 : 10450944
Bài 2 : 11520
Bài 3 : 783360
Bài 4 : 768000
Bài 5 : 49807360
Bài 6 : 19800
Bài 7 : –316
Bài 8 : 8365224
Bài 9 : 220
Bài 10 : 5200300

P/s : Chia sẻ, sao chép vui lòng ghi rõ nguồn tác giả : Bùi Thế Việt. Xin cám ơn.